LYCEE MODERNE DE JEUNES FILLES DE YOPOUGON	EPREUVE DE MATHEMATIQUES Série D	Année scolaire : 2014-2015
BACCALAUREAT BLANC		DUREE : 4 HEURES
SESSION : FEVRIER 2015		COEFFICIENT : 4

Cette épreuve comporte trois pages numérotées 1/2 *et* 2/2.

Exercice I (5 POINTS)

On dispose d'un dé équilibré dont une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et trois faces portent le numéro 3.

On dispose également d'une urne contenant dix boules indiscernables au toucher, portant les lettres L, O, G, A, R,I,T, H,M,E.

Un joueur fait une partie en deux étapes :

Première étape : il jette le dé et on note le numéro obtenu. Deuxième étape :

- Si le dé indique 1, il tire au hasard une boule de l'urne. Il gagne la partie si cette boule porte une voyelle et perd dans le cas contraire ;
- Si le dé indique 2, il tire au hasard deux boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces deux boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire ;
- Si le dé indique 3, il tire au hasard trois boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces trois boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

A la fin de chaque partie, il remet dans l'urne la ou les boules tirée(s).

On définit les événements suivants :

D_1:« *le dé indique* 1 » D_2:« *le dé indique* 2 » D_3:« *le dé indique* 3 » G:« *la partie est gagnée* »

A *et* B étant deux événements tels que $P(A) \neq 0$, on note $P_A(B)$ la probabilité de B sachant que A est réalisé.

1. a. Déterminer $P_{D_1}(G)$, $P_{D_2}(G)$ et $P_{D_3}(G)$.
   b. Prouver alors que $P(G) = \frac{23}{180}$.
2. Un joueur a gagné la partie. Calculer la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé.
3. Un joueur fait six parties de façons indépendantes les unes des autres.
   Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de parties que gagne ce joueur.
   a. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres puis donner les valeurs prises par Y.
   b. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur arrondie à 10^{-2}près.
   c. Calculer l'espérance mathématique $E(Y)$ de Y puis interpréter le résultat obtenu.
   d. Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9 ?

Exercice II (5 POINTS)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé$(0, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique : 2cm.

On considère les points A, B *et* C d'affixes respectives $z_A = 1 - i$; $z_B = 2 + \sqrt{3} + i$ et$z_C = 2$.

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre C et de rayon 2.

1. a. Vérifier que $B \in (\mathcal{C})$.
   b. Placer les points A *et* C. Construire le point B.
2. a. Ecrire z_A sous forme exponentielle.

b. Ecrire $\frac{z_B}{z_A}$ sous forme algébrique.

c. Démontrer que $\frac{z_B}{z_A} = (1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$.

d. En déduire la forme exponentielle de z_B.

e. Déterminer alors la valeur exacte de $Sin\ \frac{\pi}{12}$.

3. Déterminer et construire l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ du plan tel que : $|z| = |\bar{z} - 1 - i|$.
4. Pour tout point M du plan d'affixe $z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = -3i\left(\frac{z-1+i}{z-2}\right)$.
   a. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points $M(z)$ tel que z' soit réel.
   b. Démontrer que : $OM' = 3 \times \frac{AM}{CM}$.
   c. En déduire que lorsque M décrit la médiatrice de $[AC]$; le point M' décrit un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

PROBLEME (10 POINTS)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique:2cm. On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{(lnx)^2}{x-1}\ si\ x \in]0;1[\cup]1;+\infty[\\ f(1) = 0 \end{cases}$

de représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$.

Partie A (Etude d'une fonction auxiliaire)

On considère la fonction g définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 2x - 2 - xlnx$.

1) Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2) a) Justifier que $\forall x \in]0;+\infty[, g'(x) = 1 - lnx$.
   b) Etudier le signe de $g'(x)$ et en déduire les variations de g.
   c) Dresser le tableau de variation de g.
3) a) Calculer $g(1)$.
   b) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]e;+\infty[$ puis vérifier que $4{,}92 < \alpha < 4{,}93$.
   c) Justifier que : $\forall x \in]0;1[\cup]\alpha;+\infty[, g(x) < 0$ et $\forall x \in]1;\alpha[, g(x) > 0$.

Partie B (Etude de f et tracé de $(\mathcal{C}_f)$)

1) a) Justifier que f est continue en 1.
   b) Calculer $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}$ et donner toutes les interprétations du résultat obtenu.
   c) Démontrer que la droite (OJ) est une asymptote à $(\mathcal{C}_f)$.
2) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en déduire que la droite (OI) est une asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$.
   (on pourrait poser $X = \sqrt{x}$ pour le calcul de la limite.)
3) a) Calculer $f'(x), \forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$ et démontrer que $\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[, f'(x) = \frac{g(x).lnx}{x(x-1)^2}$
   b) On admet que $f'(1) = 1$. Déduire de la **PARTIE A**, le signe de $f'(x)$.
   c) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.
4) a) Démontrer que $f(\alpha) = \frac{4(\alpha-1)}{\alpha^2}$.
   b) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ par deux décimaux d'ordre 2.
5) Construire avec soin la droite (D): $y = x - 1$ et la courbe$(\mathcal{C}_f)$.